

Feuille d'Exercices n° 24

Résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss.

Exercice 1. *Pivot de Gauss pour une matrice à petite bande.*

Définissons une matrice à petite bande comme une matrice carrée de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'une telle matrice est toujours inversible (car triangulaire inférieure sans aucun 0 sur sa diagonale).

- (1) Ecrire une fonction `MatBande(L)` qui prend en paramètre une liste $L=[a_1, a_2, \dots, a_n]$ de longueur quelconque et qui retourne la matrice `numpy` à petite bande comme définie ci-dessus.
- (2) Ecrire une fonction `GaussBande(L,B)` prenant en paramètre une liste $L=[a_1, a_2, \dots, a_n]$ et un vecteur $B = \text{np.array}([b_0, b_1, \dots, b_n])$ qui appelle la fonction `MatBande(L)` puis lui applique un pivot de Gauss (simplifié) pour retourner l'unique solution du système linéaire $A.X = B$ où A est la matrice à petite bande retournée par `MatBande(L)`.
- (3) Quelle est sa complexité en temps en fonction du nombre d'équations ?
- (4) Pourriez-vous écrire une version de meilleure complexité ?

Exercice 2. *Pivot de Gauss pour une matrice 3×3 triangulaire supérieure.*

On souhaite écrire une fonction de résolution par la méthode du pivot de Gauss d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues x, y, z , échelonné, c'est à dire de la forme suivante :

$$(*) \quad \begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = g \\ \quad \quad d \cdot y + e \cdot z = h \\ \quad \quad \quad f \cdot z = i \end{cases}$$

Rappelons que l'instruction `np.zeros((3,3))` crée une matrice `numpy` carrée de taille $(3) \times (3)$ remplie de zéros.

- (1) Ecrire une fonction `Mat(L)` qui prend en paramètre une liste `L=[a,b,c,d,e,f]` de 6 nombres et qui retourne la matrice `numpy` de la matrice associé au système (*).
- (2) Ecrire la fonction `Gauss(L,B)` prenant en paramètre la liste `L=[a,b,c,d,e,f]` et la liste `B = [g,h,i]` et qui applique (la dernière étape de) la méthode du pivot de Gauss pour retourner, si elle existe, l'unique solution du système linéaire (*). Lorsque le système (*) n'est pas de Cramer la fonction s'arrêtera en retournant un message d'erreur.